Un pavage du demi-plan de Poincaré

Deux niveaux de difficulté/longueur :

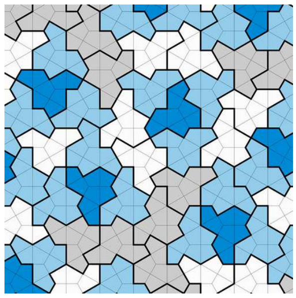
— Piste bleue : questions **1)** à **6)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Paver une surface, c'est la couvrir intégralement par des tuiles dont seules les frontières peuvent se chevaucher. Les arts graphiques ont une prédilection naturelle pour les pavages, mais leur étude est aussi un domaine riche des mathématiques.

Carrelage mural
du palais de l'Alhambra
à Grenade

Pavage *Lizard*
de l'artiste
Escher (1898-1972)



Pavage apériodique
à une seule tuile
découvert en 2023

Les deux premiers pavages ci-dessus sont périodiques, mais les mathématiciens ont découvert d'étonnants pavages apériodiques. Nous nous contenterons pour notre part de paver le *demi-plan de Poincaré* $\mathscr{P} = \big\{ z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(z) > 0 \big\}$.

1 Homographies

1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ quatre entiers pour lesquels $ad - bc = 1$. On note h la fonction $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$.

a) Vérifier que h est bien définie sur $\mathscr{P}$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathscr{P}$: $\quad \mathrm{Im}\big(h(z)\big) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$. $\quad$ En déduire que h est à valeurs dans $\mathscr{P}$.

Toute fonction h du genre précédent est appelée une *homographie de* $\mathscr{P}$ et on note $\mathscr{H}$ l'ensemble de ces fonctions.

Attention cependant :

— On n'oubliera pas de tenir compte de la condition $ad - bc = 1$ dans la suite du problème.

— Par définition, les homographies de $\mathscr{P}$ sont définies sur $\mathscr{P}$ et pas au-delà. Bien que la fonction $z \longmapsto \dfrac{z+1}{z+2}$ puisse être définie sur $\mathbb{C} \setminus \big\{-2\big\}$ tout entier, seule sa restriction à $\mathscr{P}$ est appelée une homographie de $\mathscr{P}$.

2) On reprend les notations de la question **1)**. Soit $z \in \mathscr{P}$.

a) Montrer que si $\mathrm{Im}\big(h(z)\big) \geqslant \mathrm{Im}(z)$, alors $|c| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{Im}(z)}$ et $|d| \leqslant 1 + \dfrac{|z|}{\mathrm{Im}(z)}$. On pourra s'intéresser à $\mathrm{Im}(cz+d)$.

b) Simplifier $|cz+d| \times \big|ch(z) - a\big|$, puis montrer que $|cz+d| \leqslant 1$ ou $\big|ch(z) - a\big| < 1$.

c) En déduire que $|c| \leqslant \max\left\{ \dfrac{1}{\mathrm{Im}(z)}, \dfrac{1}{\mathrm{Im}\big(h(z)\big)} \right\}$.

3) Écrire avec des quantificateurs la proposition « La composée de deux homographies de $\mathscr{P}$ est une homographie de $\mathscr{P}$ », puis la démontrer.

2 Définition d'un jeu de tuiles

On pose $\mathscr{D} = \left\{ z \in \mathscr{P} \;\middle|\; |z| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{Re}(z)\right| \leqslant \dfrac{1}{2} \right\}$ et $\mathscr{D}_h = \left\{ z \in \mathscr{P} \;\middle|\; h(z) \in \mathscr{D} \right\}$ pour tout $h \in \mathscr{H}$.

Les ensembles $\mathscr{D}_h$, h décrivant $\mathscr{H}$, sont les tuiles avec lesquelles nous allons paver $\mathscr{P}$. Les représentations graphiques demandées seront réalisées sur une même figure.

4) a) Représenter graphiquement $\mathscr{D}$ et vérifier que pour tout $z \in \mathscr{D}$: $\quad \mathrm{Im}(z) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Pour quelle homographie très simple h de $\mathscr{P}$ est-il vrai que $\mathscr{D} = \mathscr{D}_h$?

b) Vérifier que la fonction $z \overset{t_n}{\longmapsto} z + n$ est une homographie de $\mathscr{P}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et représenter graphiquement $\mathscr{D}_{t_1}$.

5) a) Vérifier que la fonction $z \overset{f}{\longmapsto} -\dfrac{1}{z}$ est une homographie de $\mathscr{P}$.

b) Montrer l'existence d'un nombre complexe ω pour lequel pour tout $z \in \mathscr{P}$: $\quad \mathrm{Re}\big(f(z)\big) \leqslant \dfrac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad |z - \omega| \geqslant 1$.

c) Montrer que $\mathscr{D}_f = \left\{ z \in \mathscr{P} \;\middle|\; |z| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |z-1| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |z+1| \geqslant 1 \right\}$, puis représenter graphiquement $\mathscr{D}_f$.

3 Recouvrement du demi-plan par les tuiles

6) a) Écrire avec des quantificateurs la proposition « Tout élément de $\mathscr{P}$ appartient à une tuile ».

La suite de la question est consacrée à la démonstration de cette proposition. Soit $z \in \mathscr{P}$ fixé.

b) Déduire des questions **1)b)** et **2)a)** que l'ensemble $\left\{ \mathrm{Im}\big(h(z)\big) \;\middle|\; h \in \mathscr{H} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\big(h(z)\big) \geqslant \mathrm{Im}(z) \right\}$ est fini.

Cet ensemble possède donc un plus grand élément qu'on peut écrire $\mathrm{Im}\big(m(z)\big)$ pour un certain $m \in \mathscr{H}$.

c) Montrer qu'on peut choisir l'homographie m de telle sorte que $\left|\mathrm{Re}\big(m(z)\big)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout $h \in \mathscr{H}$: $\quad \mathrm{Im}\big(h(z)\big) \leqslant \mathrm{Im}\big(m(z)\big)$.

e) En déduire, grâce à l'homographie f de la question **5)**, que $m(z) \in \mathscr{D}$ et conclure.

4 Chevauchement de tuiles

S'il n'est pas facile de définir proprement les notions d'*intérieur* et de *frontière* d'une partie quelconque de $\mathbb{C}$, il est au moins clair intuitivement que l'ensemble $\mathring{\mathscr{D}} = \left\{ z \in \mathscr{P} \;\middle|\; |z| > 1 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{Re}(z)\right| < \dfrac{1}{2} \right\}$ est l'intérieur de $\mathscr{D}$ et que $\mathscr{D} \setminus \mathring{\mathscr{D}}$ est sa frontière.

On étudie dans cette partie les chevauchements possibles de la tuile élémentaire $\mathscr{D}$ avec les autres tuiles du pavage étudié.

7) On reprend les notations de la question **1)**. Quitte à multiplier a, b, c et d par -1, ce qui ne modifie pas h, on peut supposer sans perte de généralité que $c \geqslant 0$.

Soit $z \in \mathring{\mathscr{D}} \cap \mathscr{D}_h$.

a) Montrer que c vaut 0 ou 1.

b) Montrer que si $c = 0$, h est la fonction $z \longmapsto z$.

c) Montrer que si $c = 1$ et $|cz + d| \leqslant 1$, alors d est compris strictement entre 0 et $-2\,\mathrm{Re}(z)$ et en déduire une contradiction.

d) Dénicher de même une contradiction dans le cas où $c = 1$ et $\left|ch(z) - a\right| < 1$.

8) Soit $h \in \mathscr{H} \setminus \left\{ z \longmapsto z \right\}$. Montrer que l'intersection $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}_h$ est incluse dans la frontière de $\mathscr{D}$.

À quoi ressemble finalement notre pavage du demi-plan de Poincaré ? Vous avez le droit d'y réfléchir seuls et de tenter un tracé plus complet. Sinon, attendez la correction !